Exercice 1 :

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale).
On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

- Si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas.
- Si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :
B l'évènement: « L'angine du malade est bactérienne».
T l'évènement: « Le test effectué sur le malade est positif ».

Les résultats seront arrondis au centième.

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2) **a)** Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif ?

b) Montrer que la probabilité que le test soit positif est égale à 0,22.

c) Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.

Quelle est la probabilité que son angine soit bactérienne ?

3) On choisit au hasard de façon indépendante 5 malades atteints d'une angine.

On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

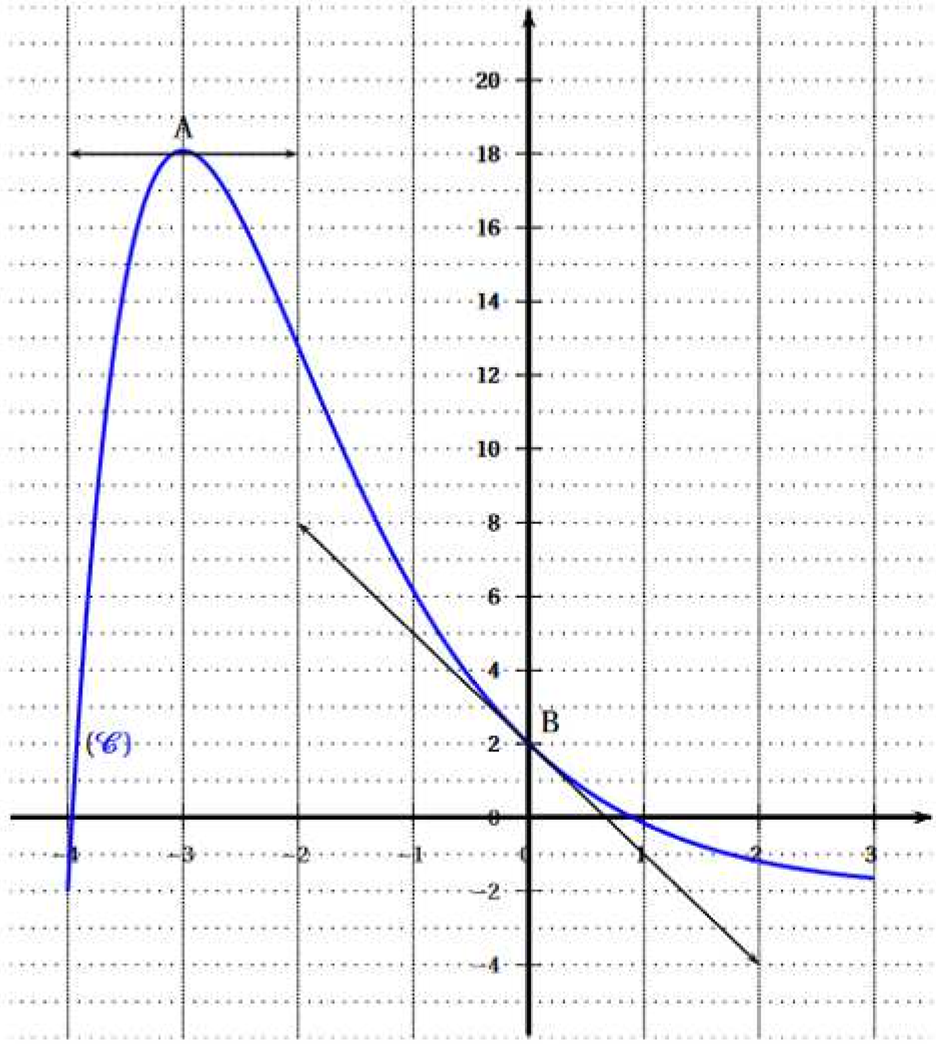
a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

b) Calculer la probabilité qu'exactement 3 malades aient un test positif.

c) Calculer la probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif.

Exercice 2 :

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;3]$. Les points A d'abscisse -3 et B(0 ; 2) sont sur la courbe $(\mathscr{C})$.
On a tracé les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points A et B. La tangente au point A est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1) Par lecture graphique, déterminer :

a) $f'(-3)$;

b) $f(0)$ et $f'(0)$.

2) La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4;3]$ par $f(x) = a + (x+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4;3]$.

b) À l'aide des questions 1) b) et 2) a), montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases}$$

c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-4;3]$ par $f(x) = -2 + (x+4)e^{-x}$.

1) Justifier que pour tout réel x de $[-4;3]$, $f'(x) = (-x-3)e^{-x}$.

2) En déduire le tableau de variations de f sur $[-4;3]$ (arrondir les valeurs au dixième si nécessaire).

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3;3]$, puis donner une valeur approchée au centième de α.

Exercice 3:

Un responsable marketing gère un site de vente de livres par Internet. Il désire réaliser une étude statistique de sa clientèle afin de prévoir l'évolution de ses ventes pour les années à venir.

Le tableau ci-dessous indique le nombre moyen de connexions par jour, calculé sur une année.

Année	2006	2007	2008	2009
Fréquentation moyenne journalière	2678	2879	3095	3327

1) a) Calculer le taux d'accroissement en % de la fréquentation entre 2006 et 2007 (arrondir au dixième).

b) Calculer de même le taux d'accroissement annuel de cette fréquentation sur les années suivantes. Que constate-t-on ?

Par la suite, on suppose que le taux de croissance annuel est de 7,5 %.

2) Pour tout entier naturel n, on note u_n la fréquentation moyenne journalière durant l'année $2006+n$. Ainsi : $u_0 = 2678$.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Quelle fréquentation peut-on prévoir en 2020 ?

3) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il indique en quelle année le nombre moyen de connexions dépassera 8000.

$U \leftarrow 2678$
$N \leftarrow 0$

Tant que U.......................
    $U \leftarrow$ ....
    $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

Afficher 2006 + N

DST TES 7/01/2019 – 2 h - Sujet B

Exercice 1 :

Une agence de voyages propose des itinéraires touristiques pour lesquels chaque client effectue un aller et un retour en utilisant soit un bateau, soit un train touristique. Le choix du mode de transport peut changer entre l'aller et le retour.

À l'aller, le bateau est choisi dans 65 % des cas.

Lorsque le bateau est choisi à l'aller, il l'est également 9 fois sur 10 pour le retour.

Lorsque le train est choisi à l'aller, le bateau est préféré dans 70 % des cas pour le retour.

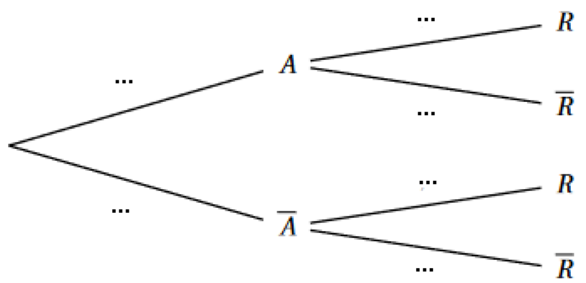
On interroge au hasard un client. On considère les évènements suivants :

A : « Le client choisit de faire l'aller en bateau ».

R : « Le client choisit de faire le retour en bateau ».

Les résultats seront arrondis au millième.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.



2) Calculer la probabilité qu'un client fasse l'aller-retour en bateau.

3) Montrer que la probabilité qu'un client utilise les deux moyens de transport est égale à 0,310.

4) On interroge successivement et de façon indépendante 20 clients de cette agence.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport et on admet que le nombre de clients est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.

a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b) Calculer la probabilité qu'exactement 7 clients utilisent les deux moyens de transport différents.

c) Calculer la probabilité qu'au moins deux clients utilisent les deux moyens de transport différents.

5) Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1560 euros en bateau et de 1200 euros en train.

On note Y la variable aléatoire qui représente le coût en euros du trajet aller-retour pour un client pris au hasard.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour la variable aléatoire Y ?

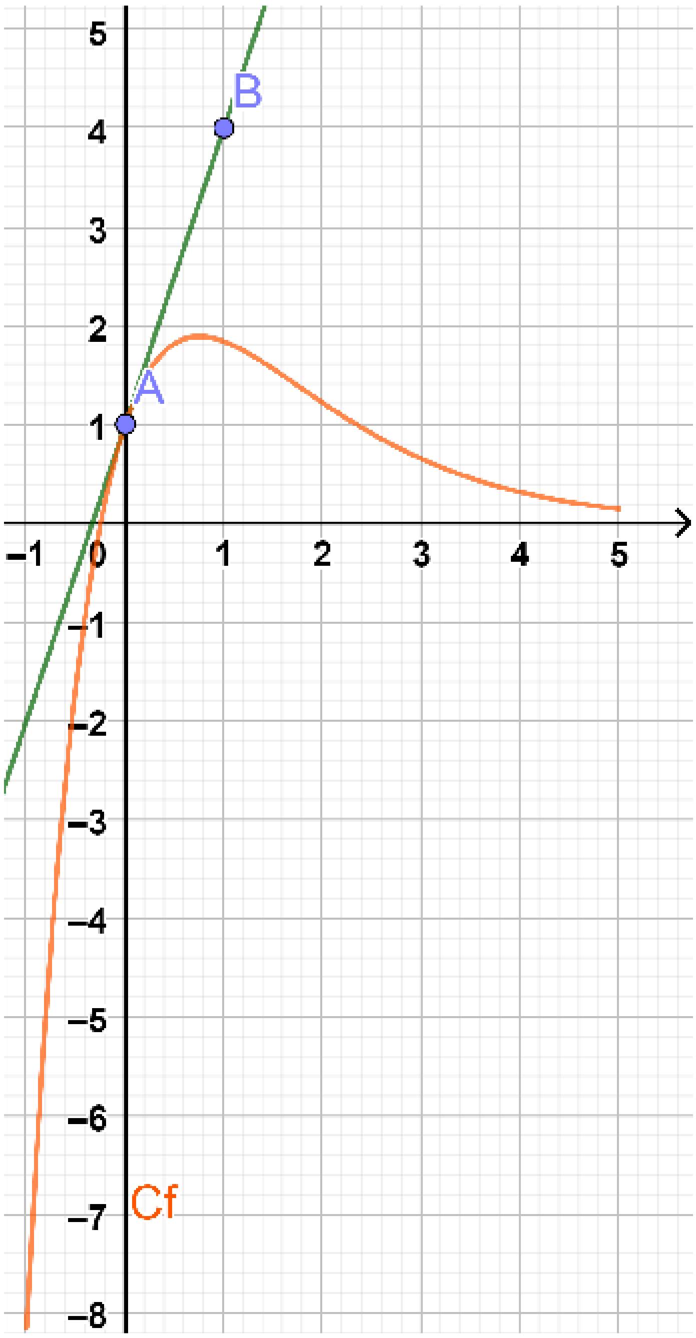
b) Donner la loi de probabilité de Y (c'est-à-dire faire un tableau donnant les valeurs prises par Y ainsi que leurs probabilités respectives).

c) Calculer l'espérance mathématique de Y . Interpréter le résultat.

Exercice 2 :

La courbe ci-dessous représente dans un repère orthonormé une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1;5]$. Le point A d'abscisse 0 appartient à la courbe.

On a tracé la tangente à la courbe au point A. La tangente passe par le point B de coordonnées (1 ; 4).



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1) Par lecture graphique, déterminer :

a) $f(0)$;

b) $f'(0)$;

c) le signe de $f'(4)$.

2) La fonction f est définie sur l'intervalle $[-1;5]$ par $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-1;5]$.

b) À l'aide des questions 1) a) et b), montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} b=1 \\ -b+a=3 \end{cases}$$

c) Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-1;5]$ par $f(x)=(4x+1)e^{-x}$.

1) Justifier que pour tout réel x de $[-1;5]$, $f'(x)=(-4x+3)e^{-x}$.

2) En déduire le tableau de variations de f sur $[-1;5]$ (arrondir les valeurs au dixième si nécessaire).

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-1;0]$, puis donner une valeur approchée au centième de α.

Exercice 3:

Un globe-trotteur a décidé de parcourir 5 000 km à pied. Le jour de son départ, il parcourt 50 km, mais ensuite la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1 % chaque jour.

On modélise par une suite (d_n) la distance parcourue en km le n-ième jour après le départ; ainsi $d_0=50$.

1) Vérifier que la distance parcourue le lendemain du départ est de 49,5 km.

2) **a)** Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Justifier.

b) Donner l'expression de d_n en fonction de n.

c) Quelle sera la distance parcourue le 15ème jour après le départ ?

3) On note S_n le nombre total de kilomètres parcourus au bout de n jours après le départ: $S_n=d_0+d_1+...+d_n$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Montrer que $S_n=5000\left(1-0,99^{n+1}\right)$.

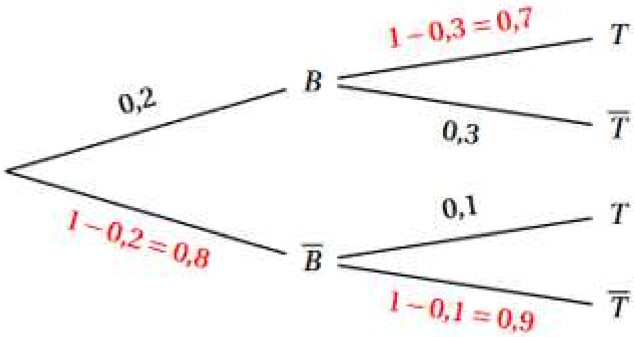
c) Calculer la distance totale parcourue par le globe-trotteur au bout de 30 jours après le départ.

d) Le globe-trotteur parviendra-t-il à réaliser son objectif (parcourir 5 000 km à pied) ? Justifier la réponse.

Corrigé sujet A

Exercice 1 :

1. On représente la situation par un arbre de probabilité :



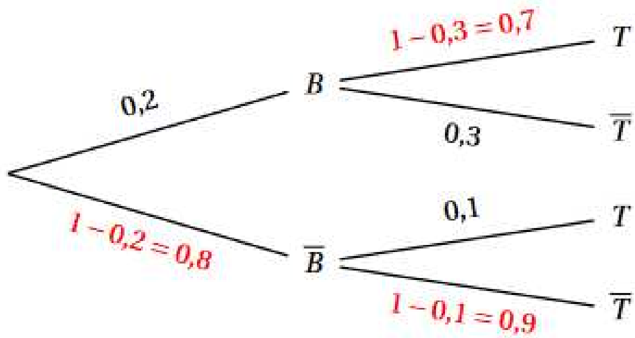
2. a. L'angine du malade est bactérienne et que le test est positif correspond à $B \cap T$:

$p(B \cap T) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$

b. D'après la formule des probabilités totales :

$p(T) = p(B \cap T) + p(\overline{B} \cap T) = 0,14 + 0,8 \times 0,1 = 0,22$

1. On représente la situation par un arbre de probabilité :



2. a. L'angine du malade est bactérienne et que le test est positif correspond à $B \cap T$:

$p(B \cap T) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$

b. D'après la formule des probabilités totales :

$p(T) = p(B \cap T) + p(\overline{B} \cap T) = 0,14 + 0,8 \times 0,1 = 0,22$

c. Il faut calculer $p_T(B) = \dfrac{p(B \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,14}{0,22} \approx 0,64$.

La probabilité que l'angine du malade soit bactérienne sachant que le test est positif est d'environ 0,64.

3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

a. Pour un malade, il n'y a que deux possibilités : il a un test positif avec une probabilité de $p = 0,22$, ou il a un test négatif avec une probabilité de $1 - p = 0,78$.

On est dans le cas d'une répétition de 5 expériences identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui donne le nombre de malades dont le test est positif suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,22$.

b. $p(X = 3) \approx 0,06$ (il faut faire BinomFdp(5,0.22,3)).

c.

La probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif est :

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \dbinom{5}{0} \times 0,22^0 \times 0,78^5 \approx 0,71.$

Exercice 2 :

Partie A

1) Par lecture graphique :

a) $f'(-3)=0$ car la tangente au point A est horizontale.

b) $f(0)=2$ car le point B(0 ; 2) est sur la courbe ($\mathscr{C}$)

Les points B(0 ; 2) et C(2 ; -4) appartiennent à la tangente au point B à la courbe ($\mathscr{C}$) , donc $f'(0)=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\dfrac{-4-2}{2-0}=\dfrac{-6}{2}=-3$.

2) La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4;3]$ par $f(x)=a+(x+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

a) Pour tout réel x de $[-4;3]$, $f'(x)=1\times e^{-x}+(x+b)\times(-e^{-x})=(-x+1-b)e^{-x}$.

b) $f(0)=2$ et $f(0)=a+(0+b)e^{-0}=a+b$, donc $a+b=2$.

$f'(0)=-3$ et $f'(0)=(-0+1-b)e^{-0}=1-b$, donc $1-b=-3$

Les nombres a et b vérifient le donc le système $\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases}$.

c) $1-b=-3$, donc $-b=-4$ et $b=4$.
$a+b=2$, donc comme $b=4$, $a+4=2$ et $a=-2$.

Partie B

1) Pour tout réel x de $[-4;3]$,

$$f'(x)=1\times e^{-x}+(x+4)\times(-e^{-x})=1\times e^{-x}-xe^{-x}-4e^{-x}=-3e^{-x}-xe^{-x}=(-x-3)e^{-x}$$

2) $-x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$

x	-4		-3		3
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
Variations de f	-2	↗	18,1	↘	-1,7

3) f est continue et strictement décroissante sur $[-3;3]$ et 0 est bien compris entre $f(-3)\approx 18{,}1$ et $f(3)\approx -1{,}7$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $[-3;3]$.

Une valeur approchée de α au centième obtenue à la calculatrice est $\alpha \approx 0{,}90$.

Exercice 3:

1) a) $\dfrac{2879-2678}{2678}\times 100=\dfrac{201}{2678}\times 100\approx 7{,}5\%$

Le taux d'accroissement de la fréquentation entre 2006 et 2007 est d'environ 7,5 %.

b) $\dfrac{3095-2879}{2879}\times 100=\dfrac{216}{2879}\times 100\approx 7{,}5\%$: taux d'accroissement entre 2007 et 2008

$\dfrac{3327-3095}{3095}\times 100=\dfrac{232}{3095}\times 100\approx 7{,}5\%$: taux d'accroissement entre 2008 et 2009.

On constate que les taux d'accroissement annuels sont tous environ égaux à 7,5 %.

2) **a)** Augmenter de 7,5 % revient à multiplier par 1,075, donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 1,075u_n$. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,075 et de premier terme $u_0 = 2678$.

b) (u_n) est une suite géométrique, donc pour tout entier n, $u_n = 2678 \times 1,075^n$.

c) Il faut calculer u_{14}. $u_{14} = 2678 \times 1,075^{14} \approx 7371$. Selon ce modèle, me nombre moyen de connections en 2020 sera d'environ 7371.

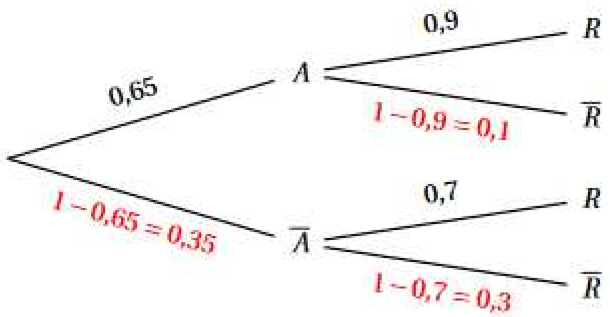
3)

$U \leftarrow 2678$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U \leq 8000$
    $U \leftarrow U \times 1,075$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher 2006 + N

Corrigé sujet B

Exercice 1 :

1. On traduit cette situation par un arbre pondéré :



2. On choisit au hasard un client de l'agence.

   a. L'événement « faire l'aller-retour en bateau » est l'événement $A \cap R$.
   D'après l'arbre : $p(A \cap R) = p(A) \times p_A(R) = 0{,}65 \times 0{,}9 = 0{,}585$.

   b. Le client utilise les deux moyens de transport dans les événements $A \cap \overline{R}$ (aller en bateau et retour en train) et $\overline{A} \cap R$ (aller en train et retour en bateau).
   Ces deux événement sont disjoints donc :
   $p\left(A \cap \overline{R} \cup \overline{A} \cap R\right) = p\left(A \cap \overline{R}\right) + p\left(\overline{A} \cap R\right) = 0{,}65 \times 0{,}1 + 0{,}35 \times 0{,}7 = 0{,}31$

3) On interroge successivement et de façon indépendante 20 clients de cette agence.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui utilisent les deux moyens de transport et on admet que le nombre de clients est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.

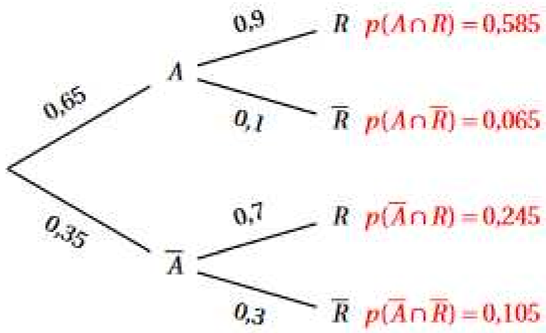
a) Les paramètres de cette loi binomiale sont $n = 20$ et $p = 0.31$ (notation $B(20;0,31)$

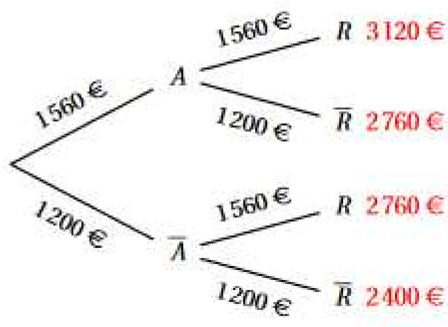
b) $p(X = 7) \approx 0{,}171$ (Sur la TI il faut faire BinomFdp(20,0.31,7)).

c) $p(X \geq 2) = 1 - \left(p(X = 1) + p(X = 0)\right) \approx 0{,}994$.

4) **a)** Les valeurs possibles pour la variable aléatoire Y sont 3120 (aller-retour en bateau), 2400 (aller-retour en train) et 2760 (aller-retour avec les deux moyens de transport différents).

b) Loi de probabilité de Y :





on peut établir la loi de probabilité de Y :

y_i	3 120	2 760	2 400
$p(Y = y_i) = p_i$	0,585	0,31	0,105

c)

L'espérance mathématique de Y est
$\sum y_i \times p_i = 3120 \times 0{,}585 + 2760 \times 0{,}31 + 2400 \times 0{,}105 = 2932{,}80$.
L'agence de voyage peut annoncer un coût moyen pour le voyage aller-retour de 2932,80 €.

Exercice 2 :

Partie A

1) Par lecture graphique:

a) $f(0)=1$;

b) $f'(0)=3$;

c) $f'(4)<0$ car la fonction est décroissante.

2) La fonction f est définie sur l'intervalle $[-1;5]$ par $f(x)=(ax+b)e^{-x}$.

a) Pour tout réel x de $[-1;5]$,

$f'(x)=ae^{-x}+(ax+b)\times(-e^{-x})=ae^{-x}-axe^{-x}-be^{-x}=(-ax+a-b)e^{-x}$.

b) $f(0)=1$ et $f(0)=(a\times 0+b)e^{-0}=b$, donc $b=1$.

$f'(0)=3$ et $f'(0)=(-a\times 0+a-b)e^{-0}=a-b$ donc $a-b=3$.

Les nombres a et b vérifient donc le système :

$$\begin{cases} b=1 \\ -b+a=3 \end{cases}$$

c) $b=1$ et $a=3+b=3+1=4$. Les valeurs de a et b sont $a=4$ et $b=1$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-1;5]$ par $f(x)=(4x+1)e^{-x}$.

1) Pour tout réel x de $[-1;5]$,

$f'(x)=4\times e^{-x}+(4x+1)\times(-e^{-x})=4e^{-x}-4xe^{-x}-e^{-x}=3e^{-x}-4xe^{-x}=(-4x+3)e^{-x}$.

2) $e^{-x}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-4x+3$. $-4x+3=0 \Leftrightarrow 4x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}=0{,}75$.

x	-1		0,75		5
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
Variations de f	-8,2	↗	1,9	↘	0,1

3) f est continue et strictement croissante sur $[-1;0]$ et 0 est bien compris entre $f(-1)\approx -8{,}2$ et $f(0)=1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $[-1;0]$. Une valeur approchée de α au centième obtenue à la calculatrice est $\alpha \approx -0{,}25$
.
(Ici on peut aussi résoudre directement l'équation $f(x)=0$ et on trouve -1/4 comme solution)

Exercice 3:

1) Diminuer de 1 % revient à multiplier par $1-\frac{1}{100}=0,99$.

$d_1=d_0\times 0,99=49,5$. La distance parcourue le lendemain du départ est de 49,5 km.

2) **a)** Pour tout entier n, $u_{n+1}=0,99u_n$. La suite (d_n) est une suite géométrique de raison 0,99 et de premier terme $d_0=50$.

b) (d_n) est une suite géométrique, donc pour tout entier n, $d_n=50\times 0,99^n$.

c) Il faut calculer $d_{15}=50\times 0,99^{15}\approx 43$. La distance parcourue le 15ème jour après le départ est d'environ 43 km.

3) **a)** $S_n=d_0+d_1+...+d_n=d_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, donc $S_n=50\times\frac{1-0,99^{n+1}}{1-0,99}$.

b) $S_n=50\times\frac{1-0,99^{n+1}}{1-0,99}=\frac{50}{1-0,99}\left(1-0,99^{n+1}\right)=\frac{50}{0,01}\left(1-0,99^{n+1}\right)=5000\left(1-0,99^{n+1}\right)$.

c) $S_{30}=5000\left(1-0,99^{31}\right)\approx 1338,5$. La distance totale parcourue par le globe-trotteur au bout de 30 jours après le départ est d'environ 1338,5 km.

d) $S_n=5000\left(1-0,99^{n+1}\right)=5000-5000\times 0,99^{n+1}$, donc pour tout entier n, $S_n<5000$.

Le globe-trotteur ne parviendra jamais à réaliser son objectif.